

文章编号: 1000-7598-(2007) 09-1983-04

一种分析软土黏弹性的分数导数开尔文模型

孙海忠¹, 张 卫²

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 暨南大学 力学与土木工程系, 广州 510632)

摘 要: 软土是一种黏、弹、塑性材料, 采用分数微积分模型来研究软土的蠕变规律目前尚未见到。选取了珠江三角洲南沙地区典型软土作为研究对象, 在对其进行大量相关试验的基础上, 采用含分数阶导数的开尔文模型来模拟该地区软土的蠕变规律, 讨论了含分数阶导数的开尔文模型的蠕变柔量和松弛模量及其应用。与传统的开尔文模型相比较, 分数阶导数的开尔文模型可以更好地拟合蠕变曲线, 而且其形式简单、统一, 在计算过程中需要调整的参数很少。可以预见, 含分数阶导数的开尔文体在软土的流变本构研究领域及其计算中将有广泛的应用前景。

关 键 词: 软土; 黏弹性; 分数阶导数; 蠕变

中图分类号: TU 447

文献标识码: A

Analysis of soft soil with viscoelastic fractional derivative Kelvin model

SUN Hai-zhong¹, ZHANG Wei²

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Mechanics and Civil Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: Soft soil is a material with the characteristics of viscosity, elasticity and plasticity. Till now, we have not yet seen researches on the creep laws of soft soil by using the models of fractional calculus. A number of one-dimensional consolidation tests for the Pearl River Delta typical soft soil have been carried out; and the creep laws of the soft soil are simulated by using fractional Kelvin model. The creep compliance and relaxation modulus of fractional Kelvin model and its application are discussed. It is shown by comparison with the traditional Kelvin model that fractional Kelvin model can simulate the creep compliance curves accurately. It has a simple and uniform form, only a few of the parameters should be adjusted in the calculation processes. It is predictable that fractional Kelvin body will have wide applications to the field of rheological constitution of soft soil and its calculation.

Key words: soft soil; viscoelasticity; fractional order derivative; creep

1 引 言

软土包括淤泥、淤泥质土等, 在我国分布广泛。软土具有天然强度低、压缩性高、透水性小、固结时间长、流变特性显著等特点。软土地基上的建筑物常常会出现沉降过大、承载力不足等问题, 因此, 流变模型的建立对于软土工程的建设施工、灾害预测和防治有着明显的实用价值。陈宗基提出了黏弹性固结理论 (1958 年)^[1], Merchant 建立了 Merchant 流变模型 (1956 年)^[2], 村山塑郎和柴田彻提出了村山塑郎固结理论 (1956 年)^[3], 詹美礼^[4]、赵维炳^[5]、余志顽^[6]等基于修正 Komamura-huang 模型理论, 通过引入殷宗泽的双

曲服面弹塑性本构模型建立了软土黏弹-黏塑性固结模型, 陈晓平、白世伟^[7]建立了非线性弹黏性固结模型, 而殷建华、Graham 建立了一个适用于单向压缩条件下土体的弹黏塑性本构模型^[8-10], 以上这些模型在岩土工程界具有重大影响, 但是它们都是基于传统的经典黏弹性本构模型建立起来的, 鉴于分数算子在黏弹性本构建模方面具有的一些优越性^[12,13], 本文拟采用含分数阶导数的改进后的开尔文模型来模拟软土在一维单向压缩条件下的蠕变过程。在该模型中开尔文模型的经典 Newton 黏壶被含分数阶导数的力学单元取代, 构成含分数导数的软土流变模型。采用分数微积分来描述软土的流变本构关系这一新思路在国际上也属于起步阶段。

2 模型的提出

经典模型理论具有直观易懂、物理概念清晰的优点,其缺点是在蠕变和松弛初期与试验数据不能很好吻合^[11]。下面提出的分数阶导数的流变模型理论保留了经典模型理论的优点,克服了其缺点。采用分数阶导数的流变模型理论实质上就是用含分数阶导数的力学单元取代 Newton 黏壶而得到的(见图 1)。为此,首先分析分数阶导数的实质。

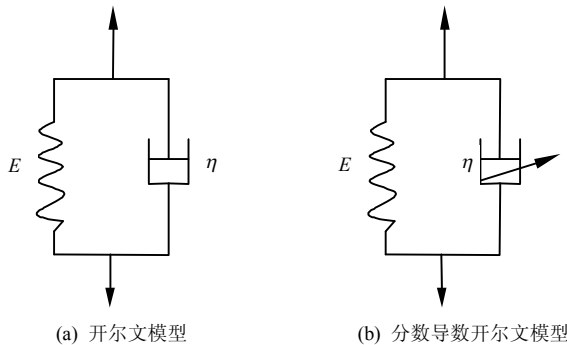


图 1 开尔文模型和分数阶开尔文模型
Fig.1 Kelvin model and fractional Kelvin model

对于符合分数阶导数开尔文固体模型的黏弹性体,其应力-应变关系为^[12]

$$\sigma(t) = q_0 \varepsilon(t) + q_1 D^r [\varepsilon(t)] \quad (1)$$

式中: q_0 代表分数阶导数开尔文模型中线性弹簧的弹性模量 E ; q_1 代表分数阶导数开尔文模型中黏壶的黏性系数 η , D^r 为 Riemann-liouville 分数阶导数算子,其表达式为

$$D^r [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-r)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^r} d\tau \quad (2)$$

式中: Γ 为 Gamma 函数, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\text{Re} z > 0$ 。

当 $r=1$ 时, $D^1 [x(t)] = \frac{d}{dt} [x(t)]$, 则式 (1) 就转化为开尔文固体模型:

$$\sigma(t) = q_0 \varepsilon(t) + q_1 \frac{d}{dt} [\varepsilon(t)] \quad (3)$$

设函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换存在且为 $F(s)$, 则分数阶导数 $D^r f(t)$ 的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned} L[D^r f(t)] &= L\{D^m [D^{-(m-r)} f(t)]\} = \\ s^m L[D^{-(m-r)} f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{-(m-r)} f(t) \Big|_{t=0} &= \\ s^r F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} D^{k-m-r} f(0) \end{aligned} \quad (4)$$

($m-1 < r < m$, $m=1, 2, 3, 4, \dots$)

若取 $m=1$, 并设 0 初始条件, 则:

$$L[D^r f(t)] = s^r F(s) - D^{-(1-r)} f(0) = s^r F(s) \quad (5)$$

分数阶导数开尔文固体模型本构方程 Laplace 变换为

$$\overline{\sigma(s)} = q_0 \overline{\varepsilon(s)} + q_1 s^r \overline{\varepsilon(s)} \quad (6)$$

分数阶导数开尔文固体模型松弛模量为^[13]

$$Y(t) = q_0 \left[1 + \frac{1}{\Gamma(1-r)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-r} \right], t > 0, \tau = \frac{q_1}{q_0} \quad (7)$$

而开尔文固体模型的松弛模量为

$$Y(t) = q_0 + q_1 \delta(t) \quad (8)$$

式中: $\delta(t)$ 为单位脉冲函数。

比较式 (7) 和式 (8), 分数阶导数开尔文固体模型可以描述应力松弛现象, 而开尔文模型不能。

分数阶导数开尔文固体模型蠕变柔量为^[13]

$$J(t) = \frac{1}{q_0} [1 - E_r(t)], t \geq 0 \quad (9)$$

$$E_r(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau} \right)^{rn}}{\Gamma(1+rn)} \quad (10)$$

而开尔文固体模型的蠕变柔量为

$$J(t) = \frac{1}{q_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), t \geq 0 \quad (11)$$

对于式 (10), 有:

$$\lim_{r \rightarrow 1} E_r(t) = \lim_{r \rightarrow 1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau} \right)^{rn}}{\Gamma(1+rn)} \right] = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (12)$$

对比式 (9) 和式 (11) 可以发现分数阶导数开尔文固体模型和开尔文固体模型都能描述蠕变现象, 但是, 分数阶导数开尔文固体模型中 r 的变动范围很大, 因而可以更精确地描述材料的流变规律。

3 应用实例

土样取自珠江三角洲南沙地区海相淤泥质黏土层, 天然含水率极高, 达 80%~90%, 土样呈流塑状态, 含有机质。对数 10 组原状饱和软黏土进行多级一维单向压缩次固结试验, 试样直径为 6.18 cm, 试样高度为 2 cm, 加荷压力分别为 37.5, 87.5, 187.5, 300, 400 kPa。根据室内试验, 试样的基本性质如表 1, 试验结果如图 2。

表1 土样基本性质指标统计表

Table 1 Basic properties of the soil samples

取样深度 /m	含水率 /%	土粒比重	天然密度 /g·cm ⁻³	饱和度 /%	孔隙比	液限 /%	塑性指数	无侧限抗压强度 /kPa	有机质含量 /%
1.4	79.0	2.67	1.53	99.3	2.124	55.0	24.0	5.2	2.0
2.2	87.6	2.67	1.53	100	2.274	51.0	23.0	6.3	3.4
4.2	87.3	2.67	1.51	100	2.312	49.5	22.5	6.8	4.6
5.6	94.7	2.68	1.49	100	2.502	60.0	34.5	6.8	4.7
6.9	85.8	2.70	1.51	99.8	2.322	47.8	24.2	7.1	4.7
8.6	94.7	2.67	1.40	93.2	2.713	66.0	34.0	7.5	4.7

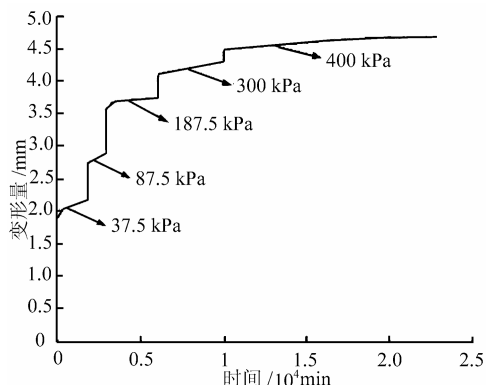


图2 多级加载单向压缩蠕变试验

Fig.2 Uniaxial consolidation tests under multilevel loading

选取在 37.5 kPa 荷载作用下的试验数据, 对式 (9) 进行最小二乘法数据拟合, 从而确定 q_0 , q_1 , r 值。将式 (10) 代入式 (9) 得

$$J(t) = \frac{1}{q_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{rn}}{\Gamma(1+rn)} = \frac{1}{q_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t^r}{\tau^r}\right)^n}{\Gamma(1+rn)} \quad (13)$$

运用 MATLAB 软件的编程语言进行最小二乘法非线性拟合得出: $q_0 = 5.8979 \times 10^4 \text{ Pa}$, $r = 0.31$, $q_1 = 3.44668274 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{min}$ 。

将 q_0 , r , q_1 代入式 (1) 绘出蠕变曲线, 并与开尔文模型进行比较, 如图 3。

同理, 选取 87.5 kPa 荷载作用下的试验数据, 对式 (13) 进行最小二乘法非线性拟合得出 $q_0 = 5.8977 \times 10^4 \text{ Pa}$, $r = 0.312$, $q_1 = 3.44668276 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{min}$ 。将 q_0 , r , q_1 代入式 (1) 绘出蠕变曲线, 并与开尔文模型进行比较, 如图 4。

从拟合结果可以看出, 37.5 kPa 和 87.5 kPa 荷载情况下的拟合参数相当接近, 从而进一步验证了波尔兹曼叠加原理^[14]。在拟合过程中发现, 开尔文固体模型和分数导数开尔文模型中的参数 q_0 , q_1 决定着拟合曲线的上下移动, 对拟合曲线的转动并不明显, 而分数导数开尔文模型比经典开尔文模型多

出的一个参数 r , 它决定着拟合曲线绕其拐点转动, 并且十分敏感。因此, 分数导数开尔文模型的拟合曲线更能精确地逼近试验数据。

从图 3、图 4 可以看出, 在拟合曲线的拐点附近, 经典开尔文模型与试验数据偏差较大。随着蠕变时间的延长, 这种偏差越来越大。可以预计, 在足够长的时间里, 经典开尔文模型将与试验数据严重不符。对于本试验软土土样, 含分数算子的流变模型更能精确地拟合试验数据。这是由分数算子的核函数为幂律函数, 且其指数可为任意实数时有更大适应范围所确定的, 而对照开尔文模型的蠕变柔量仅用一个指数函数来确定显然要精确得多。另一方面, 本研究表明, 软土的流变性更能呈现出代数性质变化规律的缓变特性而非指数变化规律。

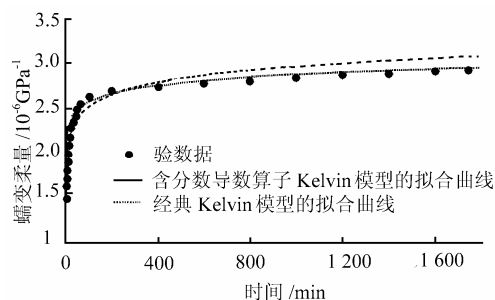


图3 含分数导数的开尔文模型和开尔文模型各自拟合曲线 (荷载 37.5 kPa)

Fig.3 Curves respectively simulated by fractional Kelvin model and Kelvin model (37.5 kPa)

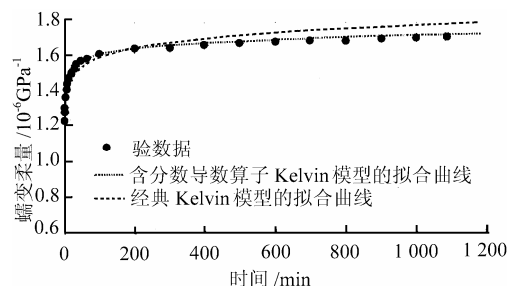


图4 含分数导数的开尔文模型和开尔文模型各自拟合曲线 (荷载 87.5 kPa)

Fig.4 Curves respectively simulated by fractional Kelvin model and Kelvin model (87.5 kPa)

4 结 论

本文提出用含分数导数的开尔文固体模型来模拟南沙地区软土的蠕变过程。分数导数开尔文固体模型采用含分数导数的力学单元取代经典黏弹性理论中的 Newton 黏壶, 其公式推导严格, 具有明确的物理意义。分数导数开尔文固体模型含有少量的

参数,能与试验结果很好地拟合,比开尔文模型要精确得多,并且能够反映应力松弛现象。当然,分数导数开尔文固体模型还可以与其他弹簧、黏壶、摩擦件等元件进行串联和并联,并将软土的塑性考虑进去。本文旨在提出用分数导数微积分来描述软土的流变本构关系这一独特的新思路,为岩土工程界同行提供有益的参考。

致谢:感谢暨南大学力学与土木工程系陈晓平教授、朱鸿鹄博士的指导和帮助!

参考文献

- [1] 陈宗基. 固结及时间效应的单维问题[J]. 土木工程学报, 1958, 5(1): 1—10.
CHEN Zong-ji. One-dimensional problem with consolidation and time efficiency[J]. **China Civil Engineering Journal**, 1958, 5(1): 1—10.
- [2] 赵维炳, 施健勇. 软土固结与流变[M]. 南京: 河海大学出版社, 1997. 200—214.
- [3] 龚晓南. 高等土力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1996.
- [4] 詹美礼, 钱家欢, 陈绪禄. 软土流变特性试验及流变模型[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(3): 54—62.
ZHAN Mei-li, QIAN Jia-huan, CHEN Xu-lu. Tests on rheological behavior of soft soil and rheologic model[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1993, 15(3): 54—62.
- [5] 赵维炳, 詹美礼, 顾吉. 软黏土黏弹-黏塑性模型及参数确定[A]. 中国青年学者岩土工程力学及其应用讨论会论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [6] 余志顽, 赵维炳, 顾吉. 黏弹-黏塑性软基排水预压的三维有限元分析[J]. 河海大学学报, 1995, 23(5): 1—7.
YU Zhi-wan, ZHAO Wei-bing, GU Jie. 3-D FEM analysis of Soft viscoelastic /viscoplastic foundation with drainage preloading[J]. **Journal of Hohai University**, 1995, 23(5): 1—7.
- [7] 陈晓平, 白世伟. 软土蠕变-固结特性及计算模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 728—734.
CHEN Xiao-ping, BAI Shi-wei. Research on creep-consolidation characteristics and calculating model of soft soil[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(5): 728—734.
- [8] Yin J H, Graham J. Viscous-elastic-plastic modeling of one-dimensional time-dependent behavior of clays[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1989, 26: 199—209.
- [9] Yin J H, Graham J. Equivalent times and elastic visco-plastic modeling of time-dependent stress-strain behavior of clays[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1994, 31: 42—52.
- [10] Yin J H, Graham J. Elastic visco-plastic modeling of one-dimensional consolidation [J]. **Geotechnique**, 1996, 46(3): 515—527.
- [11] 张为民. 一种采用分数阶导数的新流变模型理论[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2001, 23(1): 30—35.
ZHANG Wei-min. A new rheological model theory with fractional order derivatives[J]. **Natural Science Journal of Xiangtan University**, 2001, 23(1): 30—35.
- [12] SHIMIZU Nobuyuki, ZHANG Wei. Fractional calculus approach to dynamic problem of viscoelastic materials [J]. **JSME International Journal**, 1999, 1(42): 827—830.
- [13] Koeller R.C. 'Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity' transactions of the ASME[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1984, 51: 299—307.
- [14] 何平笙. 高聚物的力学性能[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1997.

上接第 1982 页

- Investigation on triaxial rheological mechanical properties of green schist specimen (II): model analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(5): 693—698.
- [13] SHAO J F, ZHU Q Z, SU K. Modeling of creep in rock materials in terms of material degradation[J]. **Computers and Geotechnics**, 2003, 30(7): 549—555.
 - [14] Dahou A, Shao J F, Bederiat M. Experimental and numerical investigations on transient creep of porous chalk[J]. **Mechanics of Materials**, 1995, 21(1): 147—158.
 - [15] 徐涛, 唐春安, 王善勇, 等. 裂纹连续度对非均质材料中雁行裂纹扩展的影响[J]. 东北大学学报, 2004, 25 (2): 167—170.
XU Tao, TANG Chun-an, WANG Shan-yong, et al. Influence of crack continuity on propagation of an echelon cracks in heterogeneous materials [J]. **Journal of Northeastern University**, 2004, 25(2): 167—170.
 - [16] 蔡美峰, 何满潮, 刘东燕. 岩石力学与岩石工程[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
 - [17] 许宏发. 软岩强度和弹模的时间效应研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16 (3): 246—251.
XU Hong-fa. Time dependent behaviors of strength and elasticity modulus of weak rock[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1997, 16(3): 246—251.